

Szakmai zárójelentés (OTKA T-048544)

A T-048544 számú OTKA pályázat kutatási szerződésében foglaltaktól egyetlen lényeges pontban történt eltérés: 2007 decemberében kérvényeztük a támogatás időtartamának a pénzmaradványok terhére történő meghosszabbítását, így a támogatott időszak a 2005. január 1. és 2008. december 31. közötti négy évet foglalta magába.

A kutatócsoportunk főleg határeloszlástételekkel és azok alkalmazásaival foglalkozik. A T-048544 számú OTKA pályázathoz benyújtott munkatervhez híven ezen pályázat a fent említett időszakban elsősorban a pénzügyi matematika területén végzett kutatásokat foglalta össze.

A pénzügyi matematika területén figyelmünk az úgynevezett „forward interest rate” modellek felé fordult, melyek a különböző lejáratú idejű kamatlábak véletlen változását írják le. A Heath–Jarrow–Morton-féle (már klasszikusnak számító) modellt egyetlen Wiener-folyamat hajtja, vagyis a dinamikájában a véletlen hatást csak egyetlen Wiener-folyamat eredményezi, mégpedig úgy, hogy a véletlen hatás a lejáratú időtől nem függ. Közelebb állnak a valósághoz azok a modellek, melyeket egy véletlen „lepedő” hajt meg, azaz a véletlen hatás függ az időponttól és a lejáratú időtől is. A legegyszerűbb, kézenfekvő lehetőség autoregressziós mezőket tekinteni, és így felhasználhatjuk az ezekre vonatkozó régebbi kutatási eredményeinket is.

Az első természetesen felvetődő kérdés az arbitrázsmentesség problémája. A [24] cikk tartalmazza a diszkrét és folytonos idejű alapmodelleket, valamint diszkrét idejű modellekben az arbitrázsmentességet garantáló drift-feltételeket.

Kutatásaink középpontjában ezen modellekkel kapcsolatos statisztikai vizsgálatok voltak. Korábbi munkánkban kizárólag a volatilitás maximum likelihood becslését vizsgáltuk. A pályázat ideje alatt rátértünk a gyakorlati szempontból sokkal lényegesebb együttes paraméterbecslési kérdésekre. Ehhez a forward kamatlábmodellek meghajtó mezőjének egy térbeli autoregressziós mezőt választottunk, a motivációt a folytonos idejű analógiákból vettük, és megvizsgáltunk néhány alternatív „market price of risk” struktúrát. Az arbitrázsmentességi feltételek alapján bevezetett sztochasztikus diszkonttényezőt úgy választottuk, hogy abban egy vektor adta a piacra jellemző „market price of risk” paramétereiket. Ezen modellben vizsgáltuk a volatilitás és a fent leírt paraméterek együttes maximum likelihood becslését. A nem független és nem azonos eloszlású mintán felírt ML probléma esetén a fenti nehézségek ellenére igazoltuk az együttes ML paraméterbecslés erős konzisztenciáját, továbbá azok aszimptotikus normalitását (melyben egyes normáló tényezők eltérőek). A fő eredményeket foglalja össze a [25] Technical Report, melyet közlésre benyújtottunk ([27]). Érdemes kiemelni, hogy a paraméterbecslést a valódi valószínűségi mérték mellett végeztük, nem pedig a martingál-mérték mellett (ami az irodalomban egy gyakran előforduló hiba).

A korábbi volatilitásra vonatkozó ML becslésekkel ellentétben az ML becsléseknek itt nincs elérhető explicit alakja, így azokat numerikusan kell közelíteni. Foglalkoztunk ezen becslések (és a szükséges numerikus eljárások) empirikus tesztelésével is. Szimulációk segítségével vizsgáltuk a becslések kismintás viselkedését (hiszen elméleti eredményeink rendre aszimptotikusak). Ezeket a vizsgálatokat tartalmazza a [26] cikk.

A fenti eredmények mind úgynevezett stabil (vagy másképpen aszimptotikusan stacionárius) modellekkel kapcsolatosak, amikor az autoregressziós együttható abszolút értéke kisebb

mint egy. Érdekes kérdés az, hogy mi történik az úgynevezett instabil modellekben, amikor az autoregressziós együttható abszolút értéke éppen egy. Az egyik meglepő eredmény, amit a [22] cikk tartalmaz, az, hogy az autoregressziós együttható maximum likelihood becslése ekkor is erősen stacionárius marad. A probléma nehézsége itt is az, hogy a minta nem azonos eloszlású és nem is független. A megoldáshoz adtunk egy elégséges feltételt erős konzisztenciára, mely a Kullback–Leibler információs mennyiségen alapul (lásd [4]). Nyilván ez az információs mennyiség más nagyságrendű a stabil és instabil modellekben, de ami meglepő, hogy a $+1$ és -1 esetekben is különbözik. Azt is sikerült belátni a [12] cikkben, hogy a megfelelő statisztikai kísérletek sorozata lokálisan aszimptotikusan normális, így van der Vaart egy általános eredménye alapján aszimptotikusan optimális tesztek tudunk explicit módon konstruálni ezekben a diszkrét idejű határidős kamatlábmodellekben. Itt a normálás a szokásos módon a Fisher-féle információs mennyiségen alapul; a meglepő nem is az, hogy ennek nagyságrendje a $+1$ és -1 esetekben itt is különbözik, hanem hogy nem arányos a Kullback–Leibler információs mennyiséggel.

Szintén a pénzügyi matematikai kutatásaink eredményeképpen az [1] cikkben sikerült késleltetett sztochasztikus differenciálegyenlet segítségével felírt modellben Black–Scholes típusú formulákat levezetni.

A pénzügyi matematikai problémákhoz szorosan kötődnek a diffúziós folyamatok. Egyrészt bebizonyítottunk egy funkcionális határeloszlás-tételt, mely arról szól, hogy valószínűségi változók háromszögrendszeréből a szokásos módon felépített véletlen lépcsősfüggvények bizonyos feltételek mellett inhomogén diffúziós folyamathoz konvergálnak (lásd [33]). Az az új, hogy a háromszögrendszerrel semiféle függőségi viszonyt sem tételezünk fel (nem kell, hogy a sorok martingálok vagy Markov-folyamatok legyenek), és hogy a határfolyamat inhomogén is lehet. Ezen eredmény alkalmazásával például határeloszlás-tételt bizonyítottunk diszkrét idejű kritikus többtípusos elágazó folyamatra; az a meglepő dolog derült ki, hogy a határfolyamat elfajul (egy egyenesre koncentrálódik). A cikk tartalmaz egy másik érdekes eredményt is, amely véletlen lépcsősfüggvényekből képzett integrálközelítő összegek sztochasztikus integrálhoz való konvergenciájára ad elegendő feltételeket. Mindkét határeloszlás-tétel lefed olyan eseteket is, amelyekben az eddig ismert eredmények nem alkalmazhatóak.

Másrészt inhomogén diffúziós folyamatokra vonatkozó statisztikai kérdésekkel is el kezdünk foglalkozni. A [14] cikkben a drift együtthatóban szereplő paraméterek maximum likelihood becslésének aszimptotikáját vizsgáltuk az úgynevezett szinguláris esetben, és sikerült elegendő feltételeket adni arra vonatkozóan, hogy a határeloszlás az úgynevezett Dickey–Fuller statisztika eloszlása legyen. A [15] cikkben sikerült bizonyos típusú inhomogén diffúziós folyamatok bizonyos funkcionáljainak a Laplace-transzformáltját explicit módon meghatározni. Megmutattuk a [13] cikkben továbbá, hogy különböző paraméterű α -Wiener hidak által generált valószínűségi mértékek szingulárisak, illetve vizsgáltuk az α -Wiener hidak trajektóriáinak regularitási tulajdonságait is.

Foglalkoztunk feltételes diffúziós folyamatok definíciójának precíz megadásával, valamint ilyen folyamatok egyértelműségének vizsgálatával. Teljes szeparábilis metrikus térbeli értékű, időhomogén Markov-folyamatokból származtatott hidak olyan konstrukcióját adtuk meg, mely csak az átmeneti sűrűségfüggvényeket használja [8]. Megmutattuk azt is, hogy bizonyos többdimenziós Ornstein–Uhlenbeck folyamatok esetén az ún. radiális rész képzése és a 0-végpontú hídképzés felcserélhető.

Folytattuk a térbeli autoregressziós folyamat paramétereinek legkisebb négyzetes becslésének vizsgálatait is. Először a [3] cikkben igazoltuk, hogy a becslés – eltérően az időbeli AR(1) folyamattól – mind a stabil, mind pedig az instabil esetben aszimptotikusan normális. A bizonyítás során jelentős nehézséget okozott az a tény, hogy a kapott határeloszlás általában elfajuló. Megvizsgáltuk továbbá a modell közel instabil változatát is (stabil modellek sorozata, instabil helyzethez tartó paraméterekkel), és itt is beláttuk a legkisebb négyzetes becslés aszimptotikus normalitását a [4] cikkben. Ezek a vizsgálatok úgynevezett „unilaterális” modellekkel kapcsolatosak. Jóval nehezebbnek bizonyultak az úgynevezett szimultán autoregressziós (SAR) modellek, amikor a folyamat egy adott pontban felvett értéke a körülötte lévő pontokban felvett értékek lineáris kombinációjának és a zajfolyamatnak az összege. Egy speciális egydimenziós SAR modell esetén sikerült eredményeket elérnünk a [5] cikkben. Ehhez a témakörhöz tartozik az a vizsgálat is, melyben egy Wiener mező eltolásparaméterének maximum likelihood becslését határoztuk meg egy meglehetősen általános megfigyelési tartomány esetén [6].

Folytattuk a lokálisan kompakt topológikus csoportokon, speciálisan Lie-csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek analitikus és algebrai tulajdonságainak vizsgálatát. Sikerült explicit képletet nyernünk Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mértékek Fourier-transzformáltjára. Mindezen túl szükséges és elegendő feltételeket találtunk arra vonatkozóan, hogy mikor lesz két, a Heisenberg-csoporton értelmezett Gauss-mérték konvolúciója újra Gauss-mérték, lásd [10]. Centrális határeloszlás tételeket bizonyítottunk lokálisan kompakt Abel csoportokra a [12] cikkben. Bizonyos Abel-csoportok esetén (tórusz, p -adikus egészek és szolenoid csoport) sikerült tetszőleges gyengén korlátlanul osztható valószínűségi mérték konstrukcióját megadni valós értékű valószínűségi változók segítségével [11]. Eredményeink speciális eseteként a szolenoidon adott Haar-mérték egy új előállítását nyertük. Mindezek mellett sikerült a portmanteau tételt általánosítanunk nem korlátos mértékekre a [9] cikkben. A [29] cikkben lokálisan kompakt Abel csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek korlátlanul oszthatóságával és konvolúciós félcsoportokba történő beágyazhatóságával foglalkoztunk. A [30] cikkben egy hasznos egyenlőtlenséget általánosítottunk lokálisan kompakt Abel csoportokra, és különböző alkalmazásokat veszünk sorra. Végül a [31] cikkben hipercsoportokon értelmezett független növekményű folyamatok martingál-karakterizációit vizsgáljuk.

Mindezeket túl statisztikai modelleket illesztettünk az elmúlt évtizedek magyar mortalitási adataira. A biztosítástanban jól ismert Lee-Carter módszerből kiindulva magyarországi halandósági adatok alapján megalkottuk a klasszikus modell egy, a magyar esetre az eredetinel jobban illeszkedő általánosított variánsát és ennek alapján előrejelzéseket adtunk a magyar halandósági ráták alakulására [2].

Egy másik alkalmazott kutatási témánk a pénzügyi matematikához és ökonometriához kapcsolódóan makrogazdasági adatok statisztikai vizsgálata volt, amely mögött szintén aktuárius alkalmazások jelentették a motivációt. Ennek során a klasszikus ún. Wilkie modellt vettük alapul, továbbá vizsgáltunk természetesen adódó alternatívákat, módosításokat. A vizsgált idősormodelleket illesztettük néhány magyar makrogazdasági adatsorra (infláció, bérek ill. bérindex, hozamindex) és segítségével elkészítettük ezen mutatók előrejelzését [7].

Végezetül itt jegyeznénk meg, hogy a támogatási időszak alatt több, a pályázatban

résztvevő kutató karrierjében jelentős szakmai előrelépés történt: Baran Sándor 2005 decemberében, Ispány Márton 2006 májusában védte meg habilitációs értekezését, Barczy Mátyás és Gáll József pedig 2006-ban illetve 2008-ban szerzett PhD fokozatot; Fazekas István pedig előkészítette és 2009 februárjában benyújtotta disszertációját az MTA doktora cím elnyerésére. Ezen kívül bekapcsolódott a kutatócsoport munkájába Fülöp Erika PhD hallgató, aki várhatóan a közeljövőben szerzi meg a PhD fokozatot.

Hivatkozások

- [1] ARRIOJAS, M., HU, Y., MOHAMMED, S.-E., and PAP, G. (2007). A delayed Black and Scholes formula. *Stoch. Anal. Appl.* **25(2)**, 471–492.
- [2] BARAN, S., GÁLL, J., ISPÁNY, M. and PAP, G. (2007). Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee-Carter method. *Acta Oeconomica* **57(1)**, 21–34.
- [3] BARAN, S., PAP, G. and ZUIJLEN, M.v. (2007). Asymptotic inference for unit roots in spatial triangular autoregression. *Acta Appl. Math.* **96(1–3)**, 17–42.
- [4] BARAN, S. and PAP, G. (2009). On the least squares estimator in a nearly unstable sequence of stationary spatial AR models. *J. Multivariate Anal.* **100(4)**, 686–698.
- [5] BARAN, S. and PAP, G. (2009). Asymptotic inference for a one-dimensional simultaneous autoregressive model. *Metrika* (közlésre benyújtva)
- [6] BARAN, S. and PAP, G. (2009). Parameter estimation of a shifted Wiener sheet. *Statistics* (közlésre benyújtva)
- [7] BARAN, S., GÁLL, J., ISPÁNY, M. and PAP, G. (2009). Stochastic models of Hungarian economic variables for actuarial use. *Acta Oeconomica* (közlésre benyújtva)
- [8] BARCZY, M. and PAP, G. (2005). Connection between deriving bridges and radial parts from multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Period. Math. Hungar.* **50(1-2)**, 47–60.
- [9] BARCZY, M. and PAP, G. (2006). Portmanteau theorem for unbounded measures. *Statist. Probab. Lett.* **76(17)**, 1831–1835.
- [10] BARCZY, M. and PAP, G. (2006). Fourier transform of Gauss measures on the Heisenberg group. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **42(5)**, 607–633.
- [11] BARCZY, M. and PAP, G. (2008). Weakly infinitely divisible measures on some locally compact Abelian groups. *Lithuanian Math. J.* **48(1)**, 17–29.
- [12] BARCZY, M., BENDIKOV, A. and PAP, G. (2008). Limit theorems on some locally compact Abelian groups. *Math. Nachr.* **281(12)**, 1708–1727.
- [13] BARCZY, M. and PAP, G. (2009). α -Wiener bridges: singularity of induced measures and sample path properties. *Stoch. Anal. Appl.* (közlésre elfogadva) <http://arxiv.org/abs/0810.3070>

- [14] BARCZY, M. and PAP, G. (2009). Asymptotic behavior of maximum likelihood estimator for time inhomogeneous diffusion processes. *J. Statist. Plann. Inference* (közlésre benyújtva) <http://arxiv.org/abs/0810.2688>
- [15] BARCZY, M. and PAP, G. (2009). Explicit formulas for Laplace transforms of certain functionals of some time inhomogeneous diffusions. *J. Math. Anal. Appl* (közlésre benyújtva) <http://arxiv.org/abs/0810.2930>
- [16] BECKER-KERN, P. and PAP, G. (2007). A limit theorem for randomly stopped independent increment processes on separable metrizable groups. *Math. Nachr.* **280**(15), 1–17.
- [17] BECKER-KERN, P. and PAP, G. (2008). Parameter estimation of selfsimilarity exponents. *J. Multivariate Anal.* **99**(1), 117–140.
- [18] BINGHAM, M. and PAP, G. (2008). Embeddable probability measures and infinitesimal systems of probability measures on a Moore Lie group. *Publ. Math. Debrecen* **72**(3-4), 293–316.
- [19] FEINSILVER, Ph. and PAP, G. (2007). Calculation of Fourier transform of a Brownian motion in the Heisenberg group using splitting formulas. *J. Funct. Anal.* **249**(1), 1–30.
- [20] FÜLÖP, E. and PAP, G. (2007). Asymptotically optimal tests for a discrete time random field HJM type interest rate model. *Acta Sci. Math.* **73**(3-4), 637–661.
- [21] FÜLÖP, E. and PAP, G. (2008). Note on strong consistency of maximum likelihood estimators for dependent observations. In: *7th International Conference on Applied Informatics* (Eger, 2007), vol. I, pp. 223–228, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft.
- [22] FÜLÖP, E. and PAP, G. (2009). Strong consistency of maximum likelihood estimators for a discrete time random field HJM type interest rate model. *Lithuanian Math. J.* (közlésre elfogadva)
- [23] GÁLL, J., PAP, G. and ZUIJLEN, M.v. (2005). Note on the proportions of financial assets with dependent distributions in optimal portfolios. In: *6th International Conference on Applied Informatics* (Eger, 2004), vol. II, pp. 339–349, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft.
- [24] GÁLL, J., PAP, G. and ZUIJLEN, M.v. (2006). Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields. *Comput. Math. Appl.* **51**(3-4), 387–396.
- [25] GÁLL, J., PAP, G. and ZUIJLEN, M.v. (2006). Joint ML estimation of all parameters in a discrete time random field HJM type interest rate model, *Report No. 0606 (July)*, Radboud University of Nijmegen, The Netherlands.
- [26] GÁLL, J., WILLEM, P. and PAP, G. (2007). Random field forward interest rate models, market price of risk and their statistics. *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.* **53**(2), 233–242.

- [27] GÁLL, J. and PAP, G. (2009). Joint ML estimation of all parameters in a discrete time random field HJM type interest rate model. *Econometrics Journal* (közlésre benyújtva)
- [28] GYÖRFI, L., ISPÁNY, M., PAP, G. and VARGA, K. (2007). Poisson limit of an inhomogeneous nearly critical INAR(1) model. *Acta Sci. Math.* **73(3–4)**, 809–835.
- [29] HEYER, H. and PAP, G. (2005). On infinite divisibility and embedding of probability measures on a locally compact Abelian group. In: *Infinite Dimensional Harmonic Analysis III* (Proc. of the Third German-Japanese Symposium, Tübingen, 2003), pp. 99–118, World Sci. Publishing, River Edge, NJ.
- [30] HEYER, H. and PAP, G. (2008). Truncation inequalities for probability measures on locally compact Abelian groups. *Math. Inequal. Appl.* **11(3)**, 483–494.
- [31] HEYER, H. and PAP, G. (2009). Martingale characterizations of increment processes in a commutative hypergroup. *Advances in Pure and Applied Mathematics* (közlésre elfogadva)
- [32] ISPÁNY, M., PAP, G. and ZUIJLEN, M.v. (2005). Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the means. *Adv. in Appl. Probab.* **37(2)**, 523–538.
- [33] ISPÁNY, M. and PAP, G. (2009). Note on weak convergence of step processes. *Acta Mathematica Hungarica* (közlésre benyújtva)
- [34] ISPÁNY, M., PAP, G. and ZUIJLEN, M.v. (2005). Critical branching mechanisms with immigration and Ornstein-Uhlenbeck type diffusions. *Acta Sci. Math.* **71(3–4)**, 821–850.

Debrecen, 2009 február 28.

Pap Gyula